Discret LCM

Clement Malfreyt

March 2026

1 Introduction

Les nombres premiers sont un des plus grands mystères de l'algèbre. Il n'existe pas de propriété assez utile pour déterminer rapidement si un nombre est premier ou non.

Ce document ne va probablement pas vous aider à trouver les nombres premiers, mais il liste quelques conséquences amusantes des propriétés qu'on connaît sur les nombres premiers dans des cas concrets.

2 PPCM

2.1 Présentation

On s'intéresse à la situation suivante :

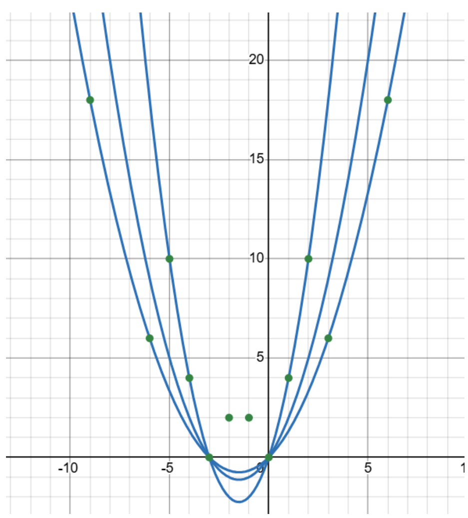

Figure 1: Illustration PPCM

Pour tous les entiers n sur l'axe des abscisses, on trace le point d'abscisse n et d'ordonnée $PPCM(a, a+n)$, avec a un entier fixé. On cherche un lien entre la valeur de a et la position des points.

On trace également les trinômes d'équation $y = \frac{x(x+a)}{A}$, avec A un entier variant entre 0 et a.

On remarque que les points se situent toujours sur les courbes où A est un diviseur de a. Le nombre de courbes avec des points dessus est donc le nombre de diviseurs, et pour a premier ces points ne se situent que sur 4 courbes (les négatifs divisant aussi)

Pour mieux comprendre la situation, vous pouvez utiliser le programme desmos associé.

2.2 Explication

En réalité, cela s'explique très bien : si y (ordonnée d'un des points) s'écrit comme $y = PPCM(n, n+a)$, on peut utiliser la relation avec le $PGCD$ pour obtenir $y = \frac{|n(n+a)|}{PGCD(n,n+a))}$, et comme $n(n+a)$ est toujours positif, on a $y = \frac{n(n+a)}{PGCD(n,n+a)}$.

Ce point se trouve bien sur la courbe d'un polynôme, avec $A = PGCD(n, n+a)$ se situant entre 0 et a, puisqu'il s'agit d'un diviseur de A.

On peut aussi utiliser l'algorithme d'Euclide pour transformer l'expression de y : On obtient $y = \frac{n(n+a)}{PGCD(n,n+a-n)} = \frac{n(n+a)}{PGCD(n,a)}$, comme $n + a > n$.

Si a est premier, alors $PGCD(n, a)$ divise a donc il vaut 1 ou a. On ne trouvera donc des points que sur les trinômes avec $A = 1$ ou $A = a$.